數學傳播　49卷2期, pp. 42-53

機率學者看量子力學 (三)

謝南瑞

謹將此文獻給朱樺教授 (1950~2020)
數學與信仰交織他的一生, ANIMA CANDIDA!

前言: 本文是參考資料 [19, 20] 的後續; 討論黎曼假說 (Riemann Hypothesis) 和機率論以及量子力學的關連。文章的格調, 和前者一致, 除了前言和結語外, 分成一些小節, 講述相關議題。又, 學術名詞以及人名的呈現方式, 和 "註:" 的使用, 作者仍大致依循前文 [19, 20]。

若是被問到什麼是數學的聖杯 (Holy Grail, 註: 原指傳說中, 耶穌和門徒在最後晚餐所用的杯子; 在科學中, 常被用來指一學科裡的崇高, 但是仍未解, 主題; 例如, 物理學的聖杯, 通常被認爲是統一場理論)? 我想, 很多數學人會回答是黎曼假說吧。這是黎曼在 1859 年於柏林科學院的授職演說中提到的, 原始手寫稿只有八頁 [14], 主題是質數分佈的一個複變函數論角度。他並沒有提出此新角度所能帶來之質數分佈問題的完整解答; 反倒是提到一個函數的零點位置之猜想, 而追尋此猜想之完整證明, 至今超過 160 年, 仍然是在途中。讀者可以看參考資料 [6]。

(一) 黎曼假說的回顧

黎曼假說通常以下述的黎曼 zeta 函數 (Riemann zeta function) 作開始:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},\ \ s = u + it \in \mathbb{C}\ \ u, t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(1) 中, $u = \mathrm{Re}(s)$ 和 $t = \mathrm{Im}(s)$ 分別是 s 的實部和虛部。對 $s : u = \mathrm{Re}(s) > 1$, (1) 式是絕對收斂 (註: 對任一正實數 a, 它的複數次方的定義 $a^s := (\ln a)e^s = (\ln a)e^u e^{it}$)。利用解析延拓 (analytic continuation), 可將 zeta 函數的定義域, 增大爲區域 $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, 而 $s = 1$ 爲單極 (simple pole)。黎曼推導出如下函數關係式 (functional equation) :

$$\pi^{-s/2}\Gamma\big(\frac{s}{2}\big)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\zeta(1-s). \tag{2}$$

上式中, Γ 函數的定義爲

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx. \tag{3}$$

式 (3) 的定義域, 也是利用解析延拓, 由 $s: u = \mathrm{Re}(s) > 0$, 增大爲區域 $\mathbb{C}\backslash\{-k, k = 0, 1, 2, \ldots\}$; 這些扣除的點都是延拓後的單極。既然 Γ 函數的值處處不爲零, 比較黎曼的關係式 (2) 的左右兩邊：我們觀察左實軸 ($u = \mathrm{Re}(s) < 0$ 且 $t = \mathrm{Im}(s) = 0$), 式 (2) 之右項除 zeta 函數外, 其餘兩項處處大於 0, 而左項則在 $-2k$ 有 Γ 函數的單極, 可以看出, zeta 函數在 $s = -2k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ 必須值爲 0, 被稱爲無聊零位 (trivial zero); 因在這些位置, zeta 函數值必須是 0, 以使式 (2) 左右兩邊皆是 0。類似的觀察, 也可使我們理解, 其它的零位, 被稱爲非無聊零位 (nontrivial zero), 必須落在帶狀區域 $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ 內, 此區域被稱爲臨界帶域 (critical strip)。又, 式 (2) 爲對鉛直軸 $u = 1/2$ 對稱, 也使黎曼猜想：

所有 zeta 函數的非無聊零位，應該在鉛直軸 $u = 1/2$ 上。

這就是黎曼假說。

此條鉛直軸稱爲臨界直線 (critical line)。另外, 我們也可以看出, 這些非無聊零位, 對實軸 $\mathrm{Im}(s) = t = 0$ 亦是對稱。以下則是一些和黎曼假説相關的內容 。

複數系 $\mathbb{C}$ 中可以定義如下的全序 (totally ordered) 關係:

$$s_1 = u_1 + it_1 \leq s_2 = u_2 + it_2 \iff (u_1 < u_2) \vee \big((u_1 = u_2) \wedge (t_1 \leq t_2)\big). \tag{4}$$

zeta 函數的非無聊零位, 只有可列多個 (註：這必須利用複變函數論的一個基本定理, 我們省略)。我們記成下列

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \cdots. \tag{5}$$

是以, 對於 $\mathbb{C}$ 中帶域 $t = \mathrm{Im}(s) \in [0, T]$, $T > 0$, 上列零位在上半帶域 $[0, T]$ 中只有有限多個。黎曼在其演講中, 提到下述式子 (在式 (6) 中, 只要 T 夠大,)

$$N(T) := \#\{j : 0 \leq s_j \leq T\} = \frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\ln T). \tag{6}$$

上式, 見於黎曼的講文 [14], 1905 年由 von Mangoldt (1854～1925) 證明。

黎曼 zeta 函數和質數的關連, 則是起因於歐拉乘積式：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k} = \prod_p\Big(1 - \frac{1}{p^k}\Big)^{-1}. \tag{7}$$

上式中, 右項是對所有質數作乘積。歐拉推導此式, 只對正整數 k, 黎曼將之延拓成對於複數 s。式 (7) 乃是由質數分解定理: 任何正整數都可以分解成質數的乘積 $n = p_1^{n_1}\cdots p_m^{n_m}$。把此乘積代入式 (7) 左項, 將作和與相乘兩運算互換 (因爲所涉及是正數, 所以無窮和與無窮積確可互換), 再利用無窮等比級數和的公式, 即可獲得式 (7)。

黎曼提出 zeta 函數, 主要是想利用它來討論高斯在 1792 年所提出的質數分佈之猜測:

令 $\{p_1, p_2, \ldots\}$ 是由小至大排列的質數列, 且 $\pi(x) := \#\{p_i : p_i \leq x\}$; 則, 以下兩個量近似相等:

$$\pi(x) \cong \frac{x}{\ln x}.$$

上式中的符號, 代表兩個量的商在 x 趨近於無窮的極限爲 1。

黎曼的企圖, 在 1896 年, 分別由 D.J. Hardmard (1865∼1963) 和 C.J. de la Vallee Pousssin (1866∼1962) 各自證出; 他們兩人都利用了 zeta 函數在鉛直線 $\mathrm{Re}(s) = 1$ 沒有零位！而 1901 年, N. von Koch (1870∼1924, 以碎形曲線 von Koch 雪花片 (von Koch snowflake) 知名) 則證明了黎曼假說確實和質數分佈密切相關:

定理: 黎曼假說成立, 若且唯若, 下式成立

$$\left|\pi(x) - \frac{x}{\ln x}\right| = O(\sqrt{x}\ln x).$$

以下是黎曼假說於 1859 年以後, 除了上述三個以外, 的一些重要進展：G. H. Hardy (1877∼1947, 天才數學者 Srinivasa Ramanujan (1887∼1920) 的伯樂, 有名著 A Mathematician's Apology (一位職業數學家的辯白) 傳世) 在 1914 年證明了臨界直線 $s = 1/2$ 上有無窮多個 zeta 函數的零位。Herald August Bohr (1857∼1951, 量子力學先驅 Neals Bohr 的兄弟) 和以下 (二) 中的 Egmund Landau 在同年則證明了, 任予 $\sigma : \sigma \geq (1/2)$,

$$\#\{s = u + it : \zeta(s) = 0, \sigma < u \leq 1, 0 \leq t \leq T\} = O(T),$$

以上兩個結果, 使各學者多相信, 黎曼假說是正確的。Atle Selberg (1917∼2007; 1950 年費爾茲獎, 1986 年沃爾夫獎, 2002年 (榮譽) 阿貝爾獎得主) 於 1942 年證明: 存在正數 C 和 T_0, 使得,

$$\#\{s : s = \frac{1}{2} + it,\ \zeta(s) = 0,\ 0 \leq t \leq T\} > C \cdot T \ln T,\ \forall\ T > T_0.$$

我們略述 Hardy 的證明如下。他的原論文是法文, 我們現在循 [6] 中的論證。主要是利用黎曼在 [14] 中引入的處處可解析的函數：

$$\xi(s) := \frac{s}{2}(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s),\ s \in \mathbb{C}.$$

令

$$H(z) := z^{-1/2}(1/\pi)\int_{-\infty}^{\infty} \xi\Big(\frac{1}{2} + it\Big) z^{it} dt, \quad z \in \mathbb{C}.$$

考慮 $z^{it} = e^{i(\ln z)t}$, $\ln z$ 表複變數對數函數的解析單值分枝, 的泰勒展式：

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-1/2}(i \ln z)^n,\ z \in \mathbb{C}.$$

利用對稱性：$\xi(s)=\xi(1-s)$, $s=(1/2)+it$, 可以看出 $c_{2k+1}=0$。設若只有有限多個 t 使 $\zeta\big((1/2)+it\big)=0$, 則只要 t 夠大, $\zeta(t)\neq 0$, 所以, 存在一正數 T, 使得 $\xi(t)$ 恆爲正, 或恆爲負; 注意: 除 $s=0,1$ 外, ζ 和 ξ 兩個函數的零位相同。對所有 $t: t>T$, 於前者, $c_{2k}>0$, 於後者, $c_{2k}<0$。這都將有以下的矛盾出現: 把 $z^{1/2}H(z)$ 對 $z':=i\ln z$ 作多次微分, 可看出, 上述展式在 $z\to e^{i\pi/4}$ 時, 不趨於 0。然而,

$$\frac{d}{dz'}=(-iz)\frac{d}{dz},$$

是以, 作多次微分, 將使 $z^{1/2}H(z)$ 變成一個在 $z\to e^{i\pi/4}$ 時趨於 0 之函數, 這是矛盾的。

有關黎曼假説進展的時間表 (至 2004 年止), 可見 [6] (10 Timeline)。另外, 進階的回顧文章, 則有 [12]。

(二) 黎曼假説和隨機漫步的關連

首先, 我們回想: 隨機漫步 (random walk), 指某醉漢, 在一維格子點上, 依手中的公正銅板之丟擲, 來決定他在格子點 (即是, 整數點, 通常以 z 表示) 上的移動: 假設, 他開始時, 站在 $z=0$ 上, 手上的銅板若丟出正面, 他就右移一格, 設若丟出反面, 他就左移一格 (對稱型隨機漫步); 如是 n 次, 大數法則告訴我們, 此人的位置 (這是個隨機量), “約是”回到出發點, 亦即, 在格子點 $z=0$, 上；而中央極限定理告訴我們, 此人位置的變異數是 n。又, 利用組合數和階乘數的 Stirling 公式, 我們也可以估計, 此人在偶數次步驟後, 例如, $n=30$, 他回到出發點的機率。

1899 年 Edmund Landau (1877∼1938, 1912年 ICM 上提出四個現今稱爲 Landau's problems 的數論猜測, 包括哥德巴赫猜測和孿生質數猜測) 在其博士論文中, 提出以下兩個定理。首先, 對任一正整數 n, 令 $\lambda(n):=(-1)^{w(n)}$, $w(n)$ 爲 n 的質因數的個數, 但是不見得須相異; 例如:

$$\lambda(1)=\lambda(2)=\lambda(3)=\lambda(5)=\lambda(8)=-1;\ \lambda(4)=\lambda(6)=\lambda(9)=\lambda(10)=1.$$

定理1: 黎曼假説成立, 若且唯若, 對任何 $\epsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda(1)+\cdots+\lambda(n)}{n^{\frac{1}{2}+\epsilon}}=0.$$

定理2: 質數定理成立, 若且唯若,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda(1)+\cdots+\lambda(n)}{n}=0.$$

學習過機率論的讀者, 大都可以了解, 第二結果是對稱隨機漫步之大數定理的形式, 而第一結果則是重複對數法則 (law of iterated logarithms) 的特殊情況。第二結果確成立 (見 (一)); 那麼第一結果就成爲一個 “容易明瞭” 的黎曼假説 (只有用到因數分解); 見 [6] 第一章。

由上觀之, 我們也可說, 雖然質數列是個命定的數列, 但是它的呈現, 卻帶有強烈的隨機性; 另一個例子, 是圓周率 π 的十進位展式 , $\pi = 3.14159\cdots$。是以, 在 1980 年代迄今, 有機率式數論 (Probabilitic Number Theory) 的研究; 可看成解析數論的一支。作者也曾有一篇相關論文 [17]。

有關命定性 (determinism) 和隨機性 (randomness, stochasticity) 的哲學, 乃至神學, 討論, 一直是學者有興趣的對象。最有名的是拉普拉斯 (Pierre-Simon, Marquis de Laplace 1749~1827, 對天文、物理、工程、數學, 乃至政冶, 都有重大貢獻); 拉普拉斯有兩本名著傳世, 一是機率的分析基礎, 這是公認的機率論之數學理論的立基著作; 另一是機率的哲學問題, 此書中出現有名的拉普拉斯惡魔 (Laplace's devil)。又, 量子力學也是命定和隨機互爲表裡: 薛丁格方程是命定的, 但波函數卻是須透過的機率才能理解其意涵, 以至愛因斯坦曾經有言, 上帝不丟骰子。

(三) 黎曼假說和量子力學的關連 (I)

名數學家 David Hilbert (1862~1943, 現代數學立基者; 1900 年 ICM 上提出的 23 問題, 影響現代數學研究至巨, 黎曼假說被列爲第八問) 和 George Polya (1887~1985, 名著 How to Solve It (如何解題) 的作者) 是第一個提出黎曼假說和量子力學之關連猜測 (Hilbert-Polya Conjecture): 前述 zeta 函數的非無聊零位 $s=(1/2)+it$ 之 t 是否恰是某自伴算子的特徵值? 此兩位的問題, 在曾經作大量 zeta 函數零位的數值計算之 A.M. Oldyzko (1949~) 網頁上, 有 Polya 致他的私信, 敍述, Polya 曾於 1914 年在哥丁根時, 被 (二) 中的數論學者 Landau 問到, 黎曼假說爲真是否有物理上的理由? 見 [15]。

1999 年, 兩位物理學者 M.V. Berry (1941~, 1998 年沃爾夫獎得主) 和 J.P. Keating [4, 5] , 對此猜測, 提出具體的物理觀點: 他們基於半古典物理 (semiclassical physics) 和半古典極限 (semiclassical limits) (註: 前者意指, 對一系統的解釋, 須包含且揉合古典物理和量子物理; 後者意指, 對此系統的數學式和其計算, 所須的極限式和級數展式, 涉及普朗克常數 $\hbar$), 列出若要解答此猜測, 則所建立的物理系統, 須有九個條件 [4]。例如, 他們提出, 此自伴算子來自於一古典動力系統, 稱爲 Riemann Dynamics, 的量子化 (條件 a; 條件 $a, b, c, \ldots$ 的編號是依 [4] 中所定的); 而此動力系統 Riemann Dynamics 須是 “擬一維的” (quasi-onedimensional) (條件 i), 因爲：由 (一) 中的式 (6),

$$N(T) \ll T^{1+\alpha}, \quad \forall\ \alpha > 0.$$

又, 此 Riemann Dynamics 須是 “沒有時間反向對稱性” (no time-reversal symmetry) (條件 c), 因爲：由下第 (三) 節, 它對應的隨機矩陣是么正系綜, 而不是正規系綜 (註：這關連到量子坍塌, 見 [20])。再, Riemann Dynamics 須是混沌的(chaotic) (條件 b); 混沌 (chaos)

通常意味一個動力系統有以下某些特性: 運動軌跡沒有單一週期性, 旋向某個或某些奇異吸引子 (strange attractors), 軌跡在一個有界範圍內且不穩定, 各個出發點形成的軌跡族是封閉且這些軌跡混雜的 (mixed), 等等；讀者可參閱 [10] (特別是第 8 章前半段), 或相關的書籍。又, 條件 e, 各個封閉軌跡, 看成一個週期軌道, 它的週期形如 ($\{p_1, p_2, \ldots\}$ 是由小至大排列的質數列)

$$m \ln p;\ m = 1, 2, \ldots, p \in \{p_1, p_2, \ldots\}.$$

此量子系統, 由於來自一混沌古典系統的量子化, 通常也稱爲是量子混沌的 (quantum chaotic)。

Berry 和 Keating 建議的 Riemann Dynamics 是一維古典 Hamiltonian $H(q,p) := qp$ (我們使用常用的古典 Hamilton 力學符號, 見 [10] 第 8 章); 利用海森堡之符號, 見 [19], 對應的量子系統的 Hamiltonian 爲自伴算子 $(QP + PQ)/2$; Q 代表位置算符 (position operator), 而 P 代表動量算符 (momentum operator)。一量子系統, 如果是來自一混沌古典系統的量子化, 通常也稱爲是量子混沌的 (quantum chaotic)。

利用 Hamilton 力學的基本方程式, 我們得到以下的方程組

$$\frac{dq}{dt} = q(t), \qquad \frac{dp}{dt} = -p(t). \tag{8}$$

以上方程組的解是

$$q(t) = q(0)e^{t}, \quad p(t) = p(0)e^{-t};$$

前者的 Liapunov 指標爲 1, 後者的 Liapunov 指標爲 -1; 是以, 系統不穩定: 在 q-方向是指數伸張, 在 p-方向是指數收縮, 每個軌跡上的起點 $\big(q(0), p(0)\big)$ 都是雙曲點 (hyperbolic point)。但是, 系統 $H(q,p) = qp$ 是可積的 (integrable), 是以, 它不是混沌的; 可積性可由 [10] 第 8 章 281 頁 1,2 得知。在以下 (五) 中, 我們將繼續討論 Berry 和 Keating 論文的後續發展。

(四) 黎曼假說和量子力學的關連 (II)

由 (一) 中之式 (6), 我們有, 只要 T 夠大,

$$\#\{j : 0 \le s_j \le T\} \cong \frac{T \ln T}{2\pi}.$$

我們考慮正規化 (normalized) 零位列; 令

$$\hat{s}_j := \frac{s_j \ln s_j}{2\pi}, \quad j \ge 1.$$

此正規化是源自 (一) 中所述的高斯質數分佈定理 (由上面漸近式也可以看出)。

在 [13] 中, 數論學者 Hugh Montgomery (1944∼) 計算出以下結果:

令兩正規化零位之差距, $j, k = 1, \ldots$

$$\delta_j^k := \hat{s}_{j+k} - \hat{s}_j,$$

設若黎曼假説是正確的, 則, 他計算得,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{1\le j\le N : \alpha<\delta_j^1<\beta\}}{N} = \int_\alpha^\beta \Big[1-\Big(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\Big)^2\Big] du, \quad \forall\ \alpha, \beta : -\infty<\alpha<\beta<\infty. \tag{9}$$

他把此結果, 拿去請教物理學者 Freeman Dyson (1923∼2020, 1981 年沃爾夫獎得主), 而後者看出, Montgomery 所計算出來的, 和某隨機矩陣 (random matrix) 之特徵值列的前後差距之機率分佈情況吻合! 此隨機矩陣是高斯么正系綜 (Gaussian Unitary Ensemble, GUE)。GUE 意謂一 N 階自伴方陣, 而且此方陣 N^2 個隨機元, 是獨立的標準高斯隨機變量 (上三角上各隨機元是複數值, 對角線上各隨機元則是實數值; 複數值標準高斯隨機變量, 意指一隨機變量可以表成 $\frac{1}{\sqrt{2}}(X + iY)$, 而 X 和 Y 是獨立的實數值標準高斯隨機變量)。隨機矩陣理論, 是物理學者 Eugene Wigner (1902∼1995, 1963 年諾貝爾物理學獎得主) 首倡, 用來解釋重質子所成量子系統之能階分佈, 他最爲人熟知的, 就是 Wigner 半圓定律 (Wigner's semi-circle law)。我們補充一些資料:

(1) 以機率論角度, 式 (9) 可以看成是一個非高斯中央極限定理 (Non-Gaussian Central Limit Theorem)。此類型定理意味, 所考量的隨機序列, 不是獨立的, 而是有強的相互關連。

(2) 我們可以式 (9) 改成兩個指標 (j, k), 如此就更可以看出和矩陣的關係, 參考 [12]; 又, 也可以把式 (9) 寫成更一般的形式, 也參考 [12]。

(五) 黎曼假説和量子力學的關連 (III)

物理學者 D. Schumayer 和 A. W. Hutchinson 回顧文章 [15], 很值得讀者關注。2011 年, 物理學者 G. Sierra 和 R. Rodriguez-Laguna [16] 則討論了 Berry-Keating 模型 (作者對 [4, 5] 所提出討論之對象的稱呼) 之主要問題。

首先, 在此, 我們説明, 何以物理學者, 對黎曼假說這個純粹數學的問題有興趣? 我們把式 (6) 改成

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + e(N, T)$$

黎曼假説於是就是 $e(N, T)$ 的精確估計。以下, 出現於 H. M. Edwards (1936 ∼2020) 的經典著作 [9] 132 頁 :

$$e(N, T) = \Big[-\frac{1}{8} + \cdots\Big] + \Big[1 + \mathrm{Im}\frac{1}{\pi}\int_C \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds\Big],$$

上式中, C 是一條適當的折線段 (對 s 之積分, 實際上是先對 s 之虛部再對 s 之實部的黎曼積分)。將右項兩個中括號第一項相加, 得到 7/8; 而此值有特殊的物理和幾何意義, 稱爲 Malsov 指標; 見 V.I. Arnold (1937∼2010, 2001 年沃爾夫獎得主) 的經典著作 [1] 442 頁。

其次, 量子系統的基本工作之一, 是估計予一正數 E, 所有能量小於 E 的數目, 而此數目的半古典展式爲:

$$N(E) = A(E)/h + \cdots$$

$A(E)$ 爲對應於 E 的封閉軌道所圍出的面積。對 Berry-Keating 模型 (如下述的要求), 上式爲:

$$\frac{E}{h}\Big[\ln\frac{E}{h} - 1\Big] + \frac{7}{8} + \cdots ,$$

我們使用庫倫制 (註: 一種物理量的量測單位制), 在此單位制下 $\hbar = 1$, 則上式恰就對應於 $N(T)$ 與 $e(N,T)$!

在 [4, 5, 15] 各論文中, 要求 Riemann Dynamics $H = qp$ 中, 必須 $|q| \geq \ell_q > 0$, $|p| \geq \ell_p > 0$, 且乘積有 $\ell_q\ell_p = h = 2\pi\hbar$。在這些條件下, 由式 (8), Berry-Keating 模型的解是

$$q(t) = \ell_q e^t,\ p(t) = (E/\ell_q)e^{-t},\ 0 \leq t \leq T_E = \ln(E/h).$$

上述 $A(E)$ 由上式所成軌跡和軸 $q = \ell_q$, $p = \ell_p$ 所圍出。然而, 上式所成的軌跡不是封閉的, 因爲它的起點是 $\big(\ell_q, (E/\ell_q)\big)$ $(t = 0)$, 而終點則是 $(E/\ell_p, \ell_p)$ $(t = T_E)$。G. Sierra 和 R. Rodriguez-Laguna [16] 修正 Berry-Keating 模型之 Riemann dynamics 的 Hamiltonian 成

$$H(q,p) := q\Big(p + \frac{\ell_p^2}{p}\Big), \quad 0 < \ell_q \leq q < \infty, \quad p \in \mathbb{R}.$$

上式中, ℓ_p 的量綱 (dimension) 和動量 p 一致。此時, H 在 $p = 0$ 有奇點。又, 當 $|p| \gg \ell_p$ 時, 他們所添加的項可忽略, 但是當 $|p| \ll \ell_p$ 時, 這添加項就很重要; 再, 對應的 Hamilton 方程組和其明解, 在 [16] 有列出, 由所列出的各式, 可以看出, 質點位置 q 在有界範圍內, 而且形成封閉的軌跡。

2017 年, 著名的科普雜誌 Quanta Magazine 刊出了一篇報導, 見參考資料 [a], 三位物理學者 C. Bender, D. Brody, 和 M. Muller (論文發表於 Physics Review Letters 2017 [3]), 利用一型對稱算子, 稱爲 PT (parity-time) -對稱性, 來討論和黎曼假說相關的量子力學。自伴算子是完全對稱, 所以其特徵值是實數, 這與物理量測, 不論是經典的或量子的, 符合。但是, PT-對稱算子, 並沒有此特性; 此三位學者, 試圖說明, 他們所提出的算子, 是只有實特徵值, 是以黎曼假說確成立。然而, 我們也可以反面地說, 這 “似乎涵意”是: 黎曼假說也有可能不成立 ?? , 在報導中, 也引用一位庫朗研究所的機率學者 Paul Bougrand 的審愼評論。此外, 物理學者 P. Kalauni 和 K.A. Milton [11] 則倡議利用超對稱量子模型 (supersymmetric

quantum model) 來討論 zeta 函數的非無聊零位。以上諸物理學者的提論, 有待數學者基於數學嚴格性的再審視。

(六) 黎曼假說的新近發展

6.1 1967 年 L. Carleson (1928∼, 2006 年阿貝爾獎得主) 寫了一冊百多頁的書, 後來成爲一本經典著作 [7]。在書中, 他講述了一些數學分枝中的 “例外集”(exceptional sets)。2024 年, J. Maynard (2022 年費爾茲獎得主) 和 L. Guth 在 arXiv 發表一篇 zeta 函數零位之例外集的預稿, Quanta Magazine 和科學美國人 (Scientific American) 都專文報導 [b, c], 認爲有突破的重要性。我們簡述如下: 一個證明黎曼假說的方法, 是證明在任一不含臨界直線的帶域, 例如 $0.75 < u = \text{Re}(s) < 1$ 內, 都沒有 zeta 函數的零位; 1940 年 Albert Ingham (1900∼1967, 生前是英國皇家學會會士) 證明了在此帶域內, 對任何 $U > 0$, 最多只有 $U^{3/5+c}$ 個 s, $\text{Im}(s) < U$, 使 $\zeta(s) = 0$, c 是某個常數, $0 < c < 9$; 1972 年 Martin Huxley (1944∼) 證明了 Ingham 的工作任一 $c > 0$ 都成立。Maynard 和 Guth 則是把 Ingham-Huxley 指標由 3/5 改進成 13/25。他們主要是利用 Dirichlet 多項式, 任予 $N \geq 1$,

$$D_N(t) := \sum_{N}^{2N} \frac{b_n}{n^{it}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

他們估計以下之 t 所成集合的大小

$$|D_N(t)| > N^{\sigma}, \quad \sigma \sim 3/4.$$

他們的工作, 獲得陶哲軒 (Terence Tao, 1975∼, 2006年費爾茲獎得主) 的高度肯定。

6.2 物理學者 Andre Leclair 利用隨機漫步和布朗運動來討論 zeta 函數零位, 他的網頁 (Cornell University, Department of Physics) 上列有一個新聞稿, 標題爲 Physicist offers a new take on 160 year old math problem, arXiv 也可以找到多篇相關論文, 包括題目是 Randomness of Mobius coefficients and Brownian motion: growth of the Mertens function and the Riemann Hypothesis (J. Stat. Mechanics, 2021) 的。此外, 有些機率學者, 包括著名的 Marc Yor (1949∼2014 , 生前爲法國科學院院士), 則利用三維 Wiener 過程 (布朗運動的數學模型, 見 [19] 中引用的參考資料) 和對應的 Bessel 過程來討論 zeta 函數, 可參考 Marc Yor: Some Aspects of Brownian Motion Part II, Birkhauser 1997。

結語

在本文中, 我們主要簡述黎曼假說和機率論以及量子力學的一些關連; 讀者或可以依作者前文 [20] 內建議的書, 研究進一步發展 。

黎曼假說, 和費馬最後定理, 曾經是數學星河, 尤其是數論, 的雙星。兩者皆敍述內容明確可懂, 且帶出一大串後續發展 。此外, 有意思的是, 黎曼也是有一段自評於講文中 ([9] 英譯版第 4 頁): 當然我希望在此有個嚴格證明, 但是在短暫的無功嘗試後, 我將之擱在一旁, 因為它和我下個研究目標無關 (註: 依 [2] 第 26 章內容, 黎曼在 1860 年, 從事建立二次微分形 (quadratic differential forms) 之完整工具, 目的原是為熱傳導問題, 但是和現今微分幾何密切相關)。1995 年之後, 由於費馬最後定理被 Andrew Wiles (1953∼, 1998 年獲得 IMU 特別貢獻獎, 2016 年阿貝爾獎得主) 解決, 它則成為星河中的一個北極星, 在茫茫的數學星空中, 高掛在哪兒, 領引著有心朝之前行的人。我們不免好奇, 黎曼是何許人? 2003 年, 作家兼評論者 John Derbyshire 有本關於黎曼假說的著作 [8], 獲得美國數學會 AMS 的姊妹組織 MAA 於 2007 年頒予首屆歐拉書卷獎 (Euler Book Prize)。我們以下的略述, 則主要是依參考資料 [2] 第 26 章 (註: 此章的標題, 非常特別, 是拉丁文, 中文意思是“聖潔的靈魂”), 輔以英文維基百科。Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826.09∼1866.07) 生於漢諾瓦王國 (Kingdom of Hanover), 父親是一個貧窮的路德教派 (Lutheran Church) 牧師, 他是六個子女中排第二。自小就對解數學問題有興趣, 但是正式學習的是古文字學 (Philology) 和基督神學 (Christian Theology)。他在父親的資助下, 到哥丁根大學學習神學。由於高斯的賞識及鼓勵, 且獲父親允許, 就改習數學。一年後, 到柏林大學, 1849 年再回哥丁根任教。1859 年承繼 P.G. Dirichlet (1805∼1859, 註: Dirichlet L-函數的非無聊零位, 是否也是在臨界直線 $s = (1/2) + it$ 上, 被稱為大黎曼假說 (Grand Riemann Hypothesis)) 為數學系教授。1866 年因避普魯士和漢諾瓦戰爭, 而到義大利一村莊, 因肺部宿疾而卒於該地。黎曼是虔誠的基督徒, 視作為一個數學者是他服事神的恩賜。據他的友人 Richard Dedekind (1831∼1916, 以建構無理數的戴德金截切 (Dedekind cuts) 著名) 描述, 黎曼是太太陪同下, 在吟誦主禱文時過世的。他的朋友們為他在逝世地立墓且書墓誌銘, 如右附圖 (引用自: Wikipedia, Bernhard Riemann); 銘文意為: 敬神者, 諸事必都相互效力, 使其得益 (註: 引自新約

羅馬書第 8 章 28 節)。

最後, 我們必須提及: 黎曼在 1854 年第一個演講集, 就是現今黎曼幾何 (Riemannian Geometry) 的立基演講, 而黎曼幾何學則是愛因斯坦廣義相對論的數學架構; 此主題一套非常好的“白話數學”版本, 則是 [18]。

参考資料

1. V. I. Arnold, *Mathematical Method of Classical Mechanics*, 2nd Edition, Springer 1989.
2. E.T. Bell, *Men of Mathematics*, Simon and Schuster, 1937.
3. C. Bender, D. Brody and M. Muller, *Hamiltonian for the zeros of the Riemann zeta function*, Physics Review Letters, 2017.
4. M. V. Berry and J. Keating, $H = xp$ and the Riemann Zeros, In: *Proceedings of Supersymmetry and Trace Formulae*, Springer Nature, 1999.
5. M. V. Berry and J. Keating, The Riemann Zeros and Eigenvalue Asymptotics, *SIAM Review*, vol. 41, 236-266, 1999.
6. P. Borwein, S. Choi, B. Rooney and A. Weirathmueller, *The Riemann Hypothesis - a Resource for the Aficionado and Virtuoso Alike*, CMS Books in Math, Springer 2008.
7. L. Carleson, *Selected Problems on Exceptional Sets*, North Holland, 1967.
8. J. Derbyshire, *Prime Obsession; Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, Joseph Henry Press, 2003.
9. H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Anemic Press, 1974.
10. R. C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics, An Introduction for Scientists and Engineers*, 2nd Edition, Oxford Univ. Press, 2000.
11. P. Kalauni and K. A. Milton, Supersymmetric quantum mechanics and the Riemann hypothesis, *International Journal of Modern Physics*, 2023.
12. N. M. Katz and P. Sarnak, Zeroes of zeta functions and symmetry, *Bulletin Amer. Math. Soc.*, vol.36, 1-26, 1999.
13. H. Montgomery, The pair correlation of zeroes of the zeta function, *Proc. Symposium Pure Math.*, vol.124, 181-193, 1973.
14. Barnhard Riemann, Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse (English Translation by D. R. Wilkins 1998 : On the Number of Primes Less Than a Given Magnitude), Lecture Article at Berlin Academy, 1859.
15. D. Schumayer and A. W. Hutchinson, *Physics of the Riemann Hypothesis*, Review of Modern Physics, 2011.
16. G. Sierra and R. Rodriguez-Laguna, $H = xp$ *model revisited and the Riemann Zeros*, Physics Review Letters, 2011.
17. N.-R. Shieh, A normal number theorem for Brownian motion, *Math Res. Report*, vol.2, 2021.
18. 黃武雄。大域微分幾何, 第二版。台灣大學出版社, 2024。
19. 謝南瑞。機率學者看量子力學。數學傳播季刊, 48(4), 66-72, 2024。
20. 謝南瑞。機率學者看量子力學 (二)。數學傳播季刊, 49(1), 43-49, 2025。

網站參考資料 [a, b, c]

(a) Quanta Magazine (April 4, 2017): Physicists Attack Math's $1,000,000 Question.
(b) Quanta Magazine (July 15, 2024): 'Sensational' Proof Delivers New Insights Into Prime Numbers.
(c) Scientific American (July 1, 2024): The Biggest Problem in Mathematics Is Finally a Step Closer to Being Solved.

—本文作者爲國立台灣大學數學系退休教授—